E.N.S. Saint-Cloud et Fontenay 1985

Option Mathématiques Math II

Durée : 4 heures

Pour tout entier $n > 0$ on note Λ_n l'ensemble des n-uplets $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ tels que $a_i = +1$ ou -1, pour tout entier $i \in [1, n]$.

On pose $S_i(a) = \sum_{j=1}^{i} a_j$.

1° *a.* Quelles sont les valeurs possibles de $S_n(a)$?

b. Calculer pour tout $p \in \mathbb{Z}$, le nombre $N_{n,p}$ d'éléments $a \in \Lambda_n$ tels que $S_n(a) = p$.

2° *a.* Calculer pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \, dx$.

b. Montrer que $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ converge lorsque n tend vers l'infini.

c. En déduire un équivalent de $2^{-2n} N_{2n,0}$ lorsque n tend vers l'infini.

3° Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $2^{-2n} \sum_{p, p > nx} N_{2n,2p}$ converge lorsque n tend vers l'infini.

(On pourra majorer cette expression par la somme d'une série géométrique.)

4° *a.* Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier $p > 0$, le nombre d'éléments $a \in \Lambda_n$, tels que $S_n(a) = p$ et $S_i(a) > 0$ pour tout entier $i \in [1, n]$ est égal à $\frac{p}{n} N_{n,p}$.

b. En déduire le nombre d'éléments $a \in \Lambda_{2n}$, tels que $S_i(a) > 0$ pour tout entier $i \in [1, 2n-1]$ et $S_{2n}(a) = 0$ (on remarquera que $S_{2n-1}(a) = 1$).

5° *a.* Soit h_n le nombre d'éléments $a \in \Lambda_{2n}$, tels que $S_i(a) \neq 0$ pour tout indice $i \in [1, 2n-1]$ et $S_{2n}(a) = 0$.

Vérifier que si l'on pose $g_n = N_{2n,0}$ (avec la convention $g_0 = 1$), h_n est combinaison linéaire de g_n et g_{n-1} : $h_n = \alpha g_n + \beta g_{n-1}$, où α et β sont des constantes indépendantes de n que l'on calculera.

b. Soit B_{2n} l'ensemble : $\{ a \in \Lambda_{2n}, S_i(a) \neq 0$ pour tout indice $i \in [1, 2n] \}$. Calculer card B_{2n}.

6° Montrer que $g_n = \sum_{r=1}^{n} h_r g_{n-r}$

(Considérer le premier indice i tel que $S_i(a) = 0$.)

7° Soit C_{2n} l'ensemble : $\{ a \in \Lambda_{2n}, S_i(a) \geqslant 0$ pour tout $i \in [1, 2n] \}$.

En étudiant l'application qui à tout élément $a \in C_{2n}$ associe $T(a) = (+1, a_1, ..., a_{2n-1})$, montrer que C_{2n} a g_n éléments.

8° Posons, pour tout $a \in \Lambda_{2n}$ et tout entier $i \in [1, 2n]$

$$u_i(a) = \frac{S_{i-1}(a) + S_i(a)}{2} \quad \text{(avec la convention } S_0(a) = 0\text{)}.$$

a. Montrer que $u_i(a)$ n'est jamais nul.

b. Notons $\alpha_n(a)$ le nombre d'indices $i \in [1, 2n]$, tels que $u_i(a)$ soit positif. Montrer que $\alpha_n(a)$ est pair.

c. Pour tout indice $k \in [0, n]$, on note $\pi_{k,n}$ le nombre d'éléments $a \in \Lambda_{2n}$, tels que $\alpha_n(a) = 2k$.

Montrer que $\pi_{k,n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} h_r \, \pi_{k-r,n-r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-k} h_r \, \pi_{k,n-r}$, lorsque $k \in [1, n-1]$.

9° Déduire des résultats des trois questions précédentes que $\pi_{k,n} = g_k g_{n-k}$.

10° *a.* Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, $2^{-2n} \sum_{k, \frac{n}{2} < k < nx} \pi_{k,n}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers une limite finie.

b. Calculer explicitement cette limite.
